UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

MÉMOIRE D'ÉTUDIANT

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

RÉPARTITION MODALE ET TRANSFORMATIONS DE BOX-COX: UNE APPLICATION AUX VILLES DE MONTRÉAL ET WINNIPEG

par

Jean-Olivier Ferron

Rapport de recherche de maîtrise, département de sciences économiques, dirigé par Marc Gaudry

Université de Montréal

Centre de recherche sur les transports - Publication #289

Février 1983

Dépôt légal - 2e trimestre 1983

SOMMAIRE

Ce rapport de recherche vise à faire ressortir l'importance du choix de la forme fonctionnelle lors de l'estimation d'un modèle de répartition modale. Il est montré que les modèles couramment utilisés comme le logit linéaire ne sont que des cas particuliers d'autres modèles où l'on estime simultanément les paramètres et la forme fonctionnelle. On s'attendait a priori à ce que ces derniers s'avèrent supérieurs au modèle linéaire, ce que l'on a effectivement retrouvé lors d'une application faite des données de la ville de Winnipeg (1976).

Finalement des formes encore plus générales sont sommairement examinées à savoir le logit généralisé, où les variables socio-économiques se retrouvent dans les fonctions d'utilités de tous les modes considérés, et le logit universel où les caractéristiques des modes de transport alternatifs et les variables socio-économiques se retrouvent dans la fonction d'utilité du mode considéré en plus, bien sûr, de ses propres caractéristiques. Les premières tentatives d'estimation font ressortir les difficultés d'estimation de tels modèles.

TABLE DES MATIERES

Introduction 1

Chapitre premier - Formulation et propriétés du modèle 2

Chapitre II - Description des données et analyse des résultats 12

Les données 12

Les variables de temps 14

Les variables socio-économiques 14

Traitement des données 15

Analyse des résultats 17

Chapitre III - Les modèles logit généralisé et logit universel 27

Conclusion 31

Remerciements 32

Bibliographie 33

INTRODUCTION

Le but de ce rapport est double. Il vise dans un premier temps à mettre en évidence l'improtance de la forme fonctionnelle lorsque l'on estime un modèle probabiliste de répartition modale. En second lieu, nous tenterons d'estimer des modèles plus généraux et théoriquement plus cohérents que les modèles de répartition modale généralement utilisés.

Pour ce faire, nous nous pencherons sur les propriétés théoriques des divers modèles probabilistes et plus particulièrement sur le logit qui est le modèle utilisé pour les estimations.

Nous estimerons quatre modèles de part de marché avec des transformations de BOX-COX plus ou moins contraignantes avec des données pour la ville de Winnipeg (1976) et pour Montréal (1970).

Finalement nous tenterons d'estimer des modèles logit "généralisé" et "universel" avec les données de la ville de Winnipeg.

CHAPITRE PREMIER

Formulation et propriétés du modèle

Posons dès le départ qu'un individu quelconque peut être représenté par un certain vecteur de caractéristiques "S" qui reflète indirectement ses goûts. Cet individu a le choix entre plusieurs biens, dans le cas qui nous intéresse plusieurs modes de transport qui peuvent être représentés par des vecteurs d'attributs ("X"). On pourra donc caractériser sa fonction d'utilité de la façon suivante :

$$U = V(S, X) + \varepsilon(S, X) \tag{1}$$

où "V" et "ε" sont deux fonctions qui peuvent être définis de la façon suivante :

> "V is non stochastic and reflects the "representative" tastes of the population, and ε is stochastic and reflects the idiosyneracies of the individual in tastes for the alternative with the attribute".
> (McFadden (1973), p. 108).

Pour le problème qui nous intéresse, à savoir la répartition modale, on cherche à déterminer quand le consommateur décidera d'utiliser un mode de transport plutôt qu'un autre : il faut pour cela que l'utilité associée au mode de transport choisi par ce dernier soit supérieure à celle associée aux autres modes. Ainsi, si l'on considère que le consommateur a le choix entre seulement deux modes de transport et qu'il préfère le premier, on aura que

$$(2) \quad V(X^1, S) + \varepsilon(X^1, S) \geqq V(X^2, S) + \varepsilon(X^2, S)$$

où X^1 = caractéristiques du mode 1;

X^2 = caractéristiques du mode 2.

La dernière relation peut être réécrite de la façon suivante :

$$(3) \quad V(X^1, S) - V(X^2, S) \geqq \varepsilon(X^2, S) - \varepsilon(X^1, S)$$

En terme de probabilité on dire que la probabilité de choisir le mode 1 ("P_1") est telle que

$$(4) \quad P_1 = P[V(X^1, S) - V(X^2, S) \geqq \varepsilon(X^2, S) - \varepsilon(X^1, S)]$$

Supposons maintenant que V est une fonction linéaire et définissons

$$(5) \quad G[\varepsilon^2 - \varepsilon^1] = G[\varepsilon(X^2, S) - \varepsilon(X^1, S)]$$

où G est une distribution cumulative de la différence de nos termes aléatoires. Si on fait l'hypothèse que nos erreurs sont indépendamment distribuées on peut trouver quatre modèles probabilistes dépendant de la forme que prendra $G[\varepsilon^2 - \varepsilon^1]$.

Ainsi, si G est uniforme on aura un modèle linéaire de probabilité

(6) $$P_1 = (Z^2 - Z^1)'\beta$$

où $Z^i = (X^i, S)$.

Si G suit une distribution normale on obtient le modèle probit

(7) $$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(Z^2-Z^1)'\beta} e^{-t^2/2}\, dt$$

Si G suit une distribution de Weibull alors on aura le modèle logit

(8) $$P_1 = \frac{e^{Z^1\beta}}{e^{Z^1\beta} + e^{Z^2\beta}}$$

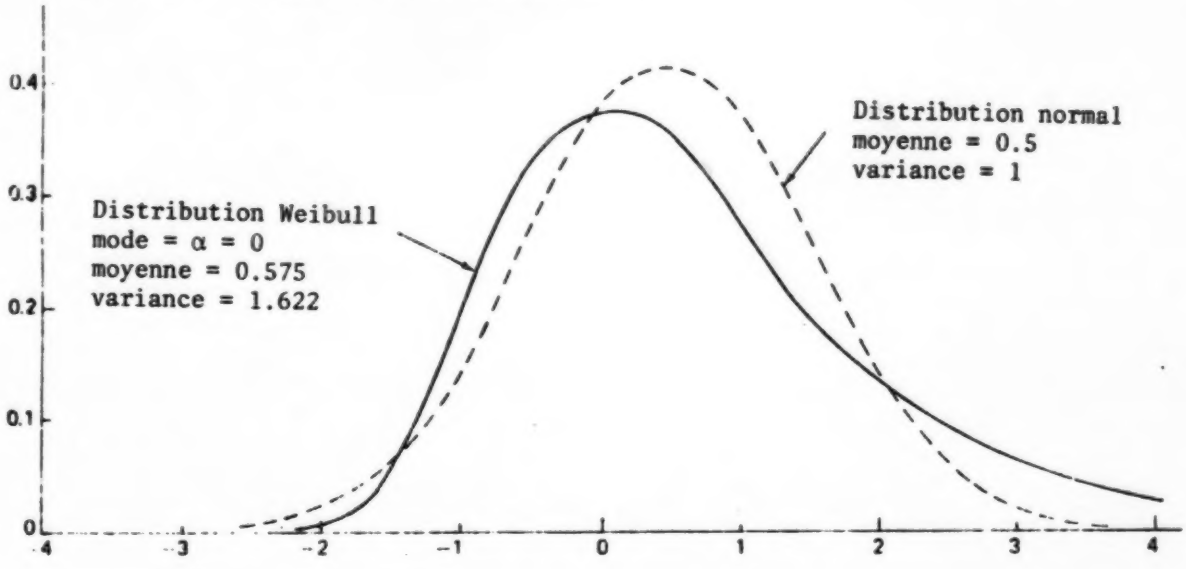
Et finalement si G suit une distribution de Cauchy, on aura le modèle arctangent

(9) $$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} (Z^2 - Z^1)'\beta$$

Rappelons en passant que le fait de supposer que G soit uniforme, normale, Weibull ou Cauchy impliquent nécessairement que les erreurs elles-mêmes de telles distributions et qu'elles sont indépendamment distribuées. Il nous reste à choisir entre les quatre modèles décrits plus haut, ce qui revient à définir a priori la distribution de la fonction G.

On peut rejeter dès le départ les modèles linéaire et arctangent pour les raisons suivantes : dans le premier cas, on n'est pas assuré d'obtenir une probabilité (ou une part de marché) comprise entre 0 et 1 ce qui peut être un résultat gênant[1]. Pour ce qui est du modèle arctangent, il pourrait sembler quelque peu audacieux de supposer que les termes aléatoires suivent la distribution de Cauchy.

En fait on serait tenté de choisir le modèle probit pour lequel les termes aléatoires doivent être indépendamment distribués et suivre la loi normale ce qui est l'hypothèse la plus fréquente en économétrie. Néanmoins, examinons d'abord les propriétés et la forme d'une distribution de Weibull avant de fixer notre choix d'une façon définitive. Sur le graphique suivant nous aurons reproduit une fonction de densité de Weibull de même qu'une fonction de densité normale.



[1]On pourrait toujours contraindre les coefficients de façon à pouvoir demeurer dans l'intervalle (0, 1) mais ceci a pour conséquence de rendre nos paramètres non efficients. Pour plus de détails à ce sujet, on peut consulter Domencich et McFadden (1975), pp. 102-108.

Comme on peut le voir, la fonction de densité de Weibull a la même forme de cloche que la normale, mais elle est légèrement décentrée vers la gauche en ce sens que sa queue de gauche est moins prononcée que celle de la normale tandis que celle de droite l'est plus rapppelant ainsi, selon Domencich et McFadden (1975) la forme d'une distribution exponentielle. D'une manière générale, on peut dire que ces deux fonctions, sans être similaires, ne sont pas très différentes et qu'il n'est peut-être pas plus restrictif de supposer a priori que les erreurs suivent une distribution de Weibull que de poser l'hypothèse qu'elles suivent une distribution normale. En fait, comme le disent Domencich et McFadden (1975), ce n'est pas sur ce critère que l'on devrait choisir entre les modèles logit et probit :

> "Noting that the probit and logit are virtually equivalent, we can choose between them or grounds of computational convenience".
> (p. 65).

Or, il est bien évident que le modèle logit est, tout au moins avec des données sur les parts de marchés, beaucoup moins difficile à estimer que le probit. En effet, en prenant le logarithme naturel de l'équation (8) on peut estimer la relation par moindres carrés ordinaires.

On doit cependant noter que le modèle logit est doté d'une propriété qui peut être à la fois très utile et très contraignante. En effet ce modèle est compatible avec l'axiome de Luce (1959) ("Independance from Irrelevant Alternatives (IIA)) qui dit que le rapport des probabilitées de deux événements ne sera pas affecté par l'introduction ou la

non-introduction d'un autre événement non considéré. Dans le cas qui nous intéresse cela revient à dire que le rapport des probabilités de choisir le mode 1 et le mode 2 n'est pas affecté par tous les autres modes existants. En effet,

$$P_1 = \frac{e^{Z^1\beta}}{\sum_{j=1}^{n} e^{Z^j\beta}} \qquad P_2 = \frac{e^{Z^2\beta}}{\sum_{j=1}^{n} e^{Z^j\beta}} ,$$

alors $$\frac{P_1}{P_2} = \frac{e^{Z^1\beta}}{e^{Z^2\beta}} .$$

On voit donc que le rapport des probabilités de choisir les modes de transport 1 et 2 n'est pas affecté par les n-2 autres modes. Cette propriété ne sera pas restrictive dans la mesure où les choix envisagés peuvent être considérés comme complètement indépendants et distincts. Or, une telle hypothèse est facilement contestable surtout dans une application à un problème de répartition modale. Ainsi, on peut illustrer ceci par un exemple que l'on retrouve fréquemment dans la littérature. Supposons que pour une population donnée la probabilité de prendre l'autobus (X^1) est de $.50(P_1)$, tandis que celle de prendre l'automobile (X^2) est également de $.50(P_2)$: le ratio des probabilités est donc unitaire. Si l'on considère maintenant l'introduction d'un autre service de transport en commun ressemblant fortement au premier sans être parfaitement équivalent (X^3) et qui s'accapare 10% du marché total (P_3), on aura à cause de l'IIA, qu'il ira chercher sa clientèle de manière égale chez les usagers du premier service de transport en commun et chez les

utilisateurs de l'automobile puisque le ratio des probabilités doit rester constant. Or, on s'attendrait intuitivement à ce que la part du marché allant au transport en commun soit peu affectée par ce nouveau mode public et que la demande de transport en commun se répartisse de façon plus ou moins égale entre les deux services (dépendant des caractéristiques de chacun d'eux).

En fait, la nécessité d'avoir des choix indépendants lorsque l'on veut utiliser le modèle logit est équivalente à la nécessité d'avoir des erreurs indépendamment distribuées. Dans l'exemple précédent on peut facilement voir que

$\varepsilon(X^1, S)$	X^1 : caractéristiques du premier système de transport en commun;
$\varepsilon(X^3, S)$	X^3 : caractéristiques du deuxième système de transport en commun;

ne seront pas indépendamment distribués, les caractéristiques de chacun d'eux étant quasi similaires. Il faudra donc, lors de l'utilisation d'un tel modèle, définir avec suffisamment de rigueur les diverses alternatives afin que l'indépendance des erreurs soit respectée.

Une façon habile de contourner le problème a été récemment proposée par Gaudry et Dagenais (1978). Ces derniers ont en effet formulé un modèle probabiliste qui a la simplicité opérationnelle du modèle logit sans toutefois être nécessairement compatible avec l'axiome de Luce. Le modèle dogit qui peut être formulé de la façon suivante

$$(10) \qquad P_i = \frac{e^{Z^i\beta} + \theta_i \sum_j e^{Z^j\beta}}{1 + \sum_j \theta_j \left(\sum_j e^{Z^j\beta}\right)}$$

que l'on peut réécrire de la façon suivante

$$(11) \qquad P_i = \frac{\theta_i}{1 + \sum_j \theta_j} + \frac{1}{1 + \sum_j \theta_j} \frac{e^{Z^i\beta}}{\sum_j e^{Z^j\beta}} \qquad \begin{matrix} j = 1, \ldots, n \\ \theta_i \geq 0 \end{matrix}$$

On peut voir aisément la dernière formulation que le modèle dogit est finalement une généralisation du modèle logit : en effet lorsque

$$\theta_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

on retrouve exactement le modèle logit. Ces paramètres θ_i qui sont spécifiques au modèle dogit peuvent être interprétés :

> "... as indexes of the extent to which the attributes of all alternatives influence the choice of the 1^{th} alternative. They function as a sort of "income effect which can reinforce or weaken the automatic "substitution effect" embodeed in the logit model". (Dagenais et Gaudry (1978)).

Il est à noter cependant que cet effet-revenu ne peut être supérieur à l'effet de substitution et mener ainsi à des alternatives inférieures ou complémentaires.

Le paramètre θ_i pourra être également interprété comme une mesure de parts de marché captives rappelant ainsi le modèle linéaire de dépenses de Stone (1954) qui comporte un terme similaire.

On peut voir également que le rapport de probabilité

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{e^{Z^i\beta} + \theta_i \sum_j e^{Z^j\beta}}{e^{Z^j\beta} + \theta_i \sum_j e^{Z^j\beta}} \qquad j = 1, \ldots, n$$

ne sera pas indépendant des n-2 autres modes à moins que

$$\theta_i = \theta_j = 0 ,$$

où $$\frac{\theta_i}{\theta_j} = \frac{e^{Z^i\beta}}{e^{Z^j\beta}}$$

Nous n'utiliserons toutefois pas le modèle dogit pour nos estimations et ce pour deux raisons. Premièrement parce que nous ne considérons que deux modes de transport alternatifs à savoir le transport en commun et l'automobile ce qui rend la non-compatibilité du modèle dogit avec l'axiome de Luce moins intéressante. Deuxièmement parce que notre modèle en est un de part de marché et non de probabilité : or, comme le souligne Gaudry (1980) on a dans ce cas que :

> "A serious problem arises when the dogit model is interpreted as a market share : the admissible region for θ_i is contrained by the smallest observed market share alternative".
> (p. 3)[1].

[1]Avec les données que nous utiliserons, Galarneau (1978) a estimé un modèle dogit et a trouvé que les θ étaient non significativement différents de 0.

On utilisera donc le modèle logit dans la partie empirique de ce modèle. Néanmoins, plutôt que de fixer a priori la forme fonctionnelle du modèle nous avons décidé d'utiliser des transformations de Box-Cox (1964) sur les variables explicatives. Ainsi, notre modèle de part de marché lorsque deux modes sont considérés sera comme suit

$$(12) \qquad \left(\frac{P_1}{1 - P_1}\right) = \ell n \left(\frac{P_1}{P_2}\right) = V_1 - V_2$$

$$\text{où} \quad V_i = \beta_0 + \sum_k \left[\frac{X_{i_k}^{\lambda_k} - 1}{\lambda_k}\right]$$

Comme on peut le voir, on a ajouté un terme constant à nos variables explicatives. Sa présente est, selon Schlesselman (1971), importante en ce sens qu'elle permet de préserver l'invariance de la transformation aux unités de mesure.

L'utilisation des transformations Box-Cox peut s'avérer utile, voire primordiale, lorsque l'on a pas de raisons théoriques de choisir une forme fonctionnelle plutôt qu'une autre. En effet toutes les propriétés des estimateurs sont basées, entre autres, sur l'hypothèse que la forme fonctionnelle retenue est la bonne. Donc, le fait d'imposer une forme fonctionnelle erronée aurait pour conséquence de rendre les résultats suspects. De toute façon, même si l'on a une idée précise de la forme fonctionnelle du modèle les transformations de Box-Cox ne devraient que confirmer nos attentes. On n'a donc pas de désavantages en tant que tel à les utiliser.

CHAPITRE II

Description des données et analyse des résultats

Les données

Nous avons appliqué les modèles développés au chapitre précédent à des données pour la ville de Winnipeg (1976) et celle de Montréal (1970). Dans le cas de Winnipeg, la ville a été partitionnée en 147 zones ce qui nous donnait une possibilité de 21 609 paires origine-destination. De celles-ci, 4 762 ne comptaient aucun déplacement et ont donc été éliminées. De plus nous n'avons retenu que les paires origine-destination où il y avait 60 déplacements et plus, ce qui ramène notre échantillon à 211 paires origine-destination. Finalement, on ne considère que les déplacements faits à l'heure de pointe pour les motifs travail et étude. On trouvera une description complète de ces données et des procédures d'enquête dans les textes de Galarneau (1978) et celui de Cléroux, Florian, Galarneau (1979).

De façon similaire la ville de Montréal a été partitionnée en 25 zones, ce qui signifie une possibilité de 625 paires origine-destination. Après avoir éliminé celles où l'on ne comptait pas de déplacements pour l'un ou l'autre des modes considérés, il nous est resté un échantillon de 98 paires origine-destination. Cette fois-ci tous les motifs de déplacement sont inclus et les données ne concernent encore une fois que l'heure de pointe.

A partir de ces deux banques de données nous avons formé six variables explicatives et une variable dépendante et ce pour chacune des deux villes précitées. Ainsi, on définira la variable dépendante de la façon suivante

$$PARTBUS_{ij} = \ell n \left[\frac{\text{Nombre de déplacements en autobus entre i et j}}{\text{Nombre de déplacements en automobile entre i et j}} \right]$$

Les variables explicatives peuvent être regroupées en trois classes, à savoir les variables de tarifs ayant une dimension argent, celles qui ont une dimension temps et finalement celles qui réflètent les caractéristiques socio-économiques.

Les variables de tarifs

Le tarif associé au déplacement en automobile a été défini de la façon suivante

$$TAUT_{ij} = \text{Distance parcourue} \times 0{,}06\$ + \frac{\text{Coût du stationnement mensuel en j}}{40}$$

Il aurait été logique d'inclure le tarif relié à l'utilisation du transport en commun. Cependant, celui-ci étant constant quelque soit la distance parcourue, il est bien évident que son inclusion entraînerait nécessairement des problèmes d'inversion de matrice lors de l'estimation. Néanmoins, l'effet de cette variable omise volontairement sera inclus dans le coefficient estimé pour la constante.

Les variables de temps

Pour ce qui est du temps de déplacement en autobus, nous avons regroupé le temps de trajet, le temps d'attente et les temps d'accès en une seule variable que l'on nomme impédance autobus. On a de plus supposé que les temps d'attente et d'accès étaient trois fois plus désagréable que le temps de trajet pour l'utilisateur :

$TZIMP_{ij}$ = Temps de trajet entre i et j +
3*(Temps d'accès en i + temps d'attente en i + Temps d'accès en j)

Pour l'automobile on a considéré que le temps de trajet, les temps d'accès étant supposés nuls :

$AUTIM_{ij}$ = Temps de trajet entre i et j

Les variables socio-économiques

Trois variables socio-économiques ont été retenues pour notre modèle; tout d'abord nous avons inclus le revenu moyen des ménages par zone d'origine ($OINC_i$) de même que la disponibilité d'automobiles par ménage ($OCAR_i$) également à l'origine. Ces deux variables doivent évidemment agir de façon négative sur l'utilisation du transport en commun.

La troisième variable socio-économique considérée est la proportion d'hommes parmi tous les individus voyageant sur une même paire O/D (MEN_{ij}). Cette information était disponible à partir de l'enquête O/D

uniquement pour la ville de Winnipeg. Pour Montréal, la même variable a dû être générle de la façon suivante

$$MEN_{ij} = \frac{\text{Part de l'emploi détenu par les hommes en j}}{100} \times \frac{\text{Population active de sexe masculin en i}}{\text{Population active en i}}$$

Sachant que les hommes utilisent dans une moins forte proportion le transport en commun que les femmes, on s'attend encore une fois d'obtenir une interaction négative entre cette variable socio-économique et la variable dépendante $PARTBUS_{ij}$.

Traitement des données

Comme il a été mentionné au chapitre antérieur, nous avons retenu le modèle logit pour nos estimations. Les résultats de trois variantes de ce modèle seront rapportées ici : premièrement un modèle logit où la forme est imposée a priori, c'est-à-dire

$$(I) \quad PARTBUS_{ij} = \beta_0 + \beta_1 TZIMP_{ij} - \beta_2 TAUT_{ij} - \beta_3 AUTIM_{ij} + \beta_4 OINC_i + \beta_5 OCAR_i + \beta_6 MEN_{ij} + u$$

Cependant, l'idée d'imposer la forme fonctionnelle a priori peut sembler restrictive ce qui nous a conduit à utiliser des transformations Box-Cox sur les variables explicatives. Dans le premier de ces modèles on impose le même λ aux variables ayant une dimension temps. De façon similaire on contraint les λ affectant les variables socio-économiques à

être égaux. La variable $TAUT_{ij}$ étant la seule variable ayant une dimension argent, elle aura un λ qui lui est spécifique. Ainsi le modèle II aura l'allure suivante

$$(II)\quad PARTBUS_{ij} = \beta_0 + \beta_1\left[\frac{TZIMP_{ij}^{\lambda_t} - 1}{\lambda_t}\right] - \beta_2\left[\frac{TAUT_{ij}^{\lambda_A} - 1}{\lambda_A}\right] - \beta_3\left[\frac{AUTIM_{ij}^{\lambda_t} - 1}{\lambda_t}\right] + \beta_4\left[\frac{OINC_i^{\lambda_s} - 1}{\lambda_s}\right] + \beta_5\left[\frac{OCAR_i^{\lambda_s} - 1}{\lambda_s}\right] + \beta_6\left[\frac{MEN_{ij}^{\lambda_s} - 1}{\lambda_s}\right] + u$$

Finalement, on estimera deux autres modèles où l'on aura relâché partiellement puis totalement les contraintes d'égalité sur les λ affectant les variables de même nature

$$(III)\quad PARTBUS_{ij} = \beta_0 + \beta_1\left[\frac{TZIMP_{ij}^{\lambda_{t1}} - 1}{\lambda_{t1}}\right] - \beta_2\left[\frac{TAUT_{ij}^{\lambda_A} - 1}{\lambda_A}\right] - \beta_3\left[\frac{AUTIM_{ij}^{\lambda_{t2}} - 1}{\lambda_{t2}}\right] + \beta_4\left[\frac{OINC_i^{\lambda_s} - 1}{\lambda_s}\right] + \beta_5\left[\frac{OCAR_i^{\lambda_s} - 1}{\lambda_s}\right] + \beta_6\left[\frac{MEN_{ij}^{\lambda_s} - 1}{\lambda_s}\right] + u$$

$$(IV)\quad PARTBUS_{ij} = \beta_0 + \beta_1\left[\frac{TZIMP_{ij}^{\lambda_{t1}} - 1}{\lambda_{t1}}\right] - \beta_2\left[\frac{TAUT_{ij}^{\lambda_A} - 1}{\lambda_A}\right] - \beta_3\left[\frac{AUTIM^{\lambda_{t2}} - 1}{\lambda_{t2}}\right] + \beta_4\left[\frac{OINC_i^{\lambda_{s1}} - 1}{\lambda_{s1}}\right] - \beta_5\left[\frac{OCAR_i^{\lambda_{s2}} - 1}{\lambda_{s2}}\right] - \beta_6\left[\frac{MEN_{ij}^{\lambda_{s3}} - 1}{\lambda_{s3}}\right] + u$$

De façon similaire à Gaudry et Wills (1978) on s'attend à ce qu'une estimation simultanée de la forme fonctionnelle et de nos paramètres améliorent nos résultats et les rendent plus crédibles que lorsque l'on utilise un modèle où la forme fonctionnelle est imposée.

Les estimations ont été effectuées à l'aide du programme L-1 (Tran Cong Liem, 1979) qui maximise le logarithme de la fonction de vraisemblance. On trouvera plus de détails à ce sujet dans le texte de Tran Cong Liem (1979) ou celui de Lisa Di Pietro (1979).

Analyse des résultats

Les résultats des estimations pour les deux villes sont rapportés aux tableaux III et V. Avant de passer à l'anlayse des paramètres, il nous semble logique de déterminer laquelle des quatre formes fonctionnelles a donné les meilleurs résultats en terme de maximisation de la fonction de vraisemblance.

Tableau 1

Valeur prise par la fonction de vraisemblance

Ville / Modèle	Montréal	Winnipeg
I	28,3877	210,2242
II	29,7509	219,7096
III	30,0404	219,8280
IV	30,5554	221,6674

Comme on peut le constater au tableau 1, moins le modèle est restrictif en ce qui concerne la forme fonctionnelle, plus la fonction de vraisemblance est élevée. Néanmoins, pour pouvoir s'assurer si ce changement est suffisant pour pouvoir rejeter le modèle I, nous devons faire un test de quotient de vraisemblance.

Tableau 2

Test du quotient de vraisemblance

$-2(\text{Log } L_0 - \text{Log } L_1) \simeq \chi^2_q$

	Montréal	Winnipeg	q	$\chi^2_q.05$	$\chi^2_q.01$
I vs II	2,73	18,97	3	7,81	11,3
I vs III	3,31	19,21	4	9,49	14,9
I vs IV	4,84	24,99	6	12,6	16,8
II vs III	0,58	0,24	1	3,84	6,63
II vs IV	1,61	3,92	3	7,81	11,3
III vs IV	1,03	3,68	2	5,99	9,21

Tout d'abord on peut voir que pour la ville de Winnipeg, le test du quotient de vraisemblance nous permet de rejeter le modèle linéaire (modèle I) au profit des modèles II, III et IV. On remarquera également que la fonction de vraisemblance a surtout augmenté du modèle I à II et que le fait de libérer les contraintes supplémentaires sur les λ affectant les variables explicatives de même nature (modèles III et IV) n'a modifié la valeur de cette même fonction de vraisemblance que de façon modeste par rapport au modèle II. Ainsi, on ne peut à partir du test de quotient de vraisemblance rejeter le modèle II au profit des modèles III ou IV.

Dans le cas des estimations faites à partir des données pour la ville de Montréal on ne retrouve pas du tout les mêmes résultats. En

effet, contrairement à notre hypothèse de départ, le test du quotient de vraisemblance ne permet jamais de rejeter le modèle linéaire quel que soit le modèle alternatif considéré (II, III ou IV). En fait, la valeur prise par la fonction de vraisemblance n'augmente que très peu lorsque l'on relâche les contraintes imposées aux λ comme on peut le voir au tableau I. On retiendra donc le modèle II pour la ville de Winnipeg et le modèle I dans le cas de la ville de Montréal. Néanmoins on comparera les modèles I et II pour voir l'influence qu'a eu les transformations imposées aux variables sur le niveau et le signe des paramètres et des élasticités estimés.

Pour la ville de Winnipeg on peut voir au tableau III que dans le cas du modèle logit linéaire (I), les paramètres estimés ont tous les signes attendus exception faite de celui du revenu qui n'est cependant pas significativement différent de zéro. En fait, quatre paramètres sont significatifs à savoir le tarif automobile, l'impédance autobus, la disponibilité des voitures à l'origine et la proportion d'hommes sur chaque paire O/D. Lorsque l'on introduit les transformation de Box-Cox (modèle II), le coefficient de la variable impédance autobus devient non significatif; de plus on note que le coefficient de la variable AUTIM a le signe contraire à celui attendu mais demeure non significativement différent de zéro. A l'inverse, la variable de revenu, qui avait un signe erroné dans le premier modèle, a le signe adéquat dans le modèle deux tout en restant non significatif. Au niveau des valeurs prises par les λ, on peut remarquer que celui qui affecte la variable tarif (TAUT) est significativement

Tableau 3

Modèle logit
Variable dépendante : PARTBUS
Ville : Winnipeg

Variables exogènes	I	II	III	IV
Tarif-automobile TAUT	1,4165 (4,86)**	1,1039 (2,80)**	1,0793 (2,69)*	0,8717 (2,06)*
Impédance-autobus TZIMP	-0,16904 (-4,78)**	-0,0005 (-0,35)	-0,0002 (-0,35)	-0,0111 (-0,35)
Temps de trajet-automobile AUTIM	0,0274 (0,25)	-0,0169 (-0,75)	-0,0081 (-0,23)	0,3282 (1,13)
Proportion d'hommes MEN	-1,7689 (-4,91)**	-1,6028 (-2,89)**	-1,6058 (-2,87)**	-2,2966 (-2,11)*
Disponibilité d'automobiles à l'origine OCAR	-1,9026 (-4,01)**	-1,9272 (-4,38)**	-1,9253 (-4,36)**	-1,2072 (-2,27)**
Revenu moyen à l'origine OINC	0,0536 (0,25)	-0,0667 (-0,34)	-0,0635 (-0,33)	-1,4425 (-0,59)
Constante	0,02495 (0,73)	-0,3230 (-0,97)	-0,3147 (-1,03)	-0,1908 (-0,29)
λ_{tarif}		0,4613 (1,54)(-1,80)*	0,4518 (1,49)(-1,81)**	0,5754 (1,15)(-0,85)
λ_{temps} : TZIMP		3,5822 (2,94)**(2,12)*	3,8682 (1,85)*(1,27)	2,3372 (1,86)*(1,06)
AUTIM		3,5822 (2,94)**(2,12)*	4,1832 (1,08)(0,82)	-1,0705 (-0,86)(-1,67)*
λ_{socio} : MEN		0,7631 (1,75)*(-0,75)	0,7693 (1,75)*(-0,53)	1,2466 (1,50)(0,30)
OCAR		0,7631 (1,75)*(-0,75)	0,7693 (1,75)*(-0,53)	-0,7947 (-0,45)(-1,02)
OINC		0,7631 (1,75)*(-0,75)	0,7693 (1,75)*(-0,53)	-1,9065 (-0,50)(-0,76)
R^2	0,545	0,584	0,585	0,592
Pseudo L - R^2	0,895	0,904	0,904	0,905
n	211	211	211	211

Statistique t entre parenthèses. Pour les λ deux tests "t" sont rapportés : significativement différent de 0 à gauche et significativement différent de 1 à droite.
*Significatif à 95%; **Significatif à 99%.
Il est également à noter que les variables socio-économiques sont associées ici au mode de transport en commun.

différent de un, de même que celui qui affecte les variables à dimension temps. Toutefois le paramètre qui affecte les variables socio-économiques est significativement différent de zéro sans l'être de 1. Néanmoins, ces résultats nous confirment que l'on ne pouvait imposer une forme fonctionnelle linéaire comme on l'a fait dans le modèle I.

Plutôt que de comparer le niveau des coefficients des modèles I et II, ce qui de toute façon est difficile à faire à cause de la présence des transformations de Box-Cox, nous examinons les élasticités propres et croisées.

Comme on peut le voir au tableau 4, les élasticités pour les variables dont le coefficient était significativement différent de zéro dans le modèle I n'ont pas beaucoup varié avec les transformations de Box-Cox dans le modèle II et elles ont toutes des niveaux acceptables.

En fait, seule l'élasticité propre de l'impédance autobus varie considérablement (-1,241 à -0,725). Cependant il est difficile de porter un jugement sur la validité de l'élasticité obtenue dans le modèle II : en effet, on remarquera que la transformation Box-Cox qui affecte cette variable est significativement différente de 1.

Finalement on peut voir que le fait de laisser varier les λ dans les modèles III et IV n'a fait que rendre la plupart d'entre eux non significativement différents de 1.

Tableau 4

Elasticités[1] - Données de Winnipeg

	Modèle I		Modèle II	
	Part des déplacements en autobus	Part des déplacements en automobile	Part des déplacements en autobus	Part des déplacements en automobile
Tarif automobile	0,721	-0,035	0,803	-0,023
Temps de trajet automobile	0,050	-0,003	0,231	-0,007
Impédence autobus	-1,211	0,060	-0,725	0,021
Proportion d'hommes	-1,023	0,046	-1,063	0,034
Disponibilités d'automobiles	-1,747	0,079	-1,818	0,059
Revenu moyen à l'origine	0,0833	-0,004	-0,094	0,003

[1] $\eta_i = \beta \; X^{\lambda} \; (1 - S_i)$

où $S_i = \dfrac{\exp\left(\alpha + \sum_k \beta_k \overline{X}_{ik}\right)}{\Sigma \exp\left(\alpha + \sum_k \beta_k \overline{X}_{ik}\right)}$

Tableau 5

Modèle logit
Variable dépendante : PARTBUS
Ville : Montréal

Variables exogènes	I	II	III	IV
Tarif-automobile TAUT	0,5607 (1,19)	0,9603 (0,39)	0,4096 (0,35)	0,1913 (0,31)
Impédance-autobus TZIMP	-0,2353 (-3,52)**	-0,0961 (-0,46)	-0,1955 (-0,36)	-0,2051 (-0,35)
Temps de trajet-automobile AUTIM	0,4709 (2,68)**	0,4036 (1,78)*	0,3003 (1,18)	0,2963 (1,12)
Proportion d'hommes MEN	-1,1844 (-0,99)	-13,7064 (-0,33)	-14,7341 (-0,32)	-3,5331 (-0,19)
Disponibilité d'automobiles à l'origine OCAR	-0,7740 (-1,19)	-1,7271 (-2,36)**	-1,5969 (-2,15)**	-1,9043 (-1,61)
Revenu moyen à l'origine OINC	0,2998 (0,80)	0,1373 (0,48)	0,1327 (0,46)	0,2555 (0,43)
Constante	0,6589 (0,67)	-2,2091 (-0,30)	-2,4012 (-0,30)	-0,3937 (-0,09)
λ_{tarif}		1,5358 (0,59) (0,21)	0,7000 (0,34) (-0,14)	0,2018 (0,10) (-0,41)
λ_{temps} : TZIMP		1,4252 (1,26) (0,38)	1,0918 (0,77) (0,06)	1,0768 (0,74) (0,05)
AUTIM		1,4252 (1,26) (0,38)	1,9492 (1,39) (0,67)	2,0024 (1,40) (0.70)
λ_{socio} : MEN		4,1344 (1,23) (0,93)	4,0083 (1,15) (0,87)	1,8866 (0,30) (0,14)
OCAR		4,1344 (1,23) (0,93)	4,0083 (1,15) (0,87)	6,7010 (1,11) (0,95)
OINC		4,1344 (1,23) (0,93)	4,0083 (1,15) (0,87)	2,4554 (0,46) (0,28)
R^2	0,297	0,316	0,320	0,327
Pseudo - L - R^2	0,613	0,624	0,626	0,630
n	98	98	98	98

Statistique t entre parenthèses. Pour les λ deux tests "t" sont rapportés : significativement différent de 0 à gauche et significativement différent de 1 à droite.
*Significatif à 95%; **Significatif à 99%.

Il est également à noter que les variables socio-économiques sont associées ici au mode de transport en commun.

On peut maintenant analyser de façon similaire les résultats que l'on a obtenu avec les données de Montréal (tableau 4). La première constatation que l'on peut faire est qu'il y a très peu de coefficients qui sont significativement différents de zéro. En fait, seules les deux variables de réseau à dimension temps (TZIMP et AUTIM) ont des coefficients significatifs et de signe attendu. Ainsi, on ne peut pas dire que le modèle estime réellement bien la part des déplacements effectuées en autobus, ce qui se réflète dans la valeur prise par le R^2(.297). Cependant il s'agit, selon nous, beaucoup plus d'un problème de données qu'un problème de modèle. En effet, le fait par exemple qu'aucune variable socio-économique soit significative peut laisser sous-entendre que les zones telles que définies sont trop grandes et qu'on a par le fait même regroupé des classes d'individus fortement hétérogènes ce qui fait que les moyennes et les variances de ces variables socio-économiques ne sont réellement différentes d'une zone à l'autre. Un découpage plus fin du territoire aurait sans doute amélioré les performances du modèle.

Le fait que les modèles II, III et IV aient été rejetés lors de l'application du test du ratio de vraisemblance n'est pas étonnant puisque les λ ne sont jamais significativement différents de 1 quel que soit le modèle considéré. De plus, le coefficient de la variable impédance autobus devient non différent de zéro dans les modèles II, III et IV. En fait, dans le dernier modèle aucun des coefficients estimés est réellement significatif. Toutefois l'application des transformations de Box-Cox rend la variable disponibilité-auto significative dans les modèles II et III alors qu'elle ne l'était pas dans le logit linéaire.

Tableau 6

Elasticités - Données pour la ville de Montréal

	Modèle I		Modèle II	
	Part des déplacements en autobus	Part des déplacements en automobile	Part des déplacements en autobus	Part des déplacements en automobile
Tarif automobile	0,129	-0,056	0,171	-0,053
Temps de trajet automobile	0,465	-0,202	-0,648	-0,201
Impédance autobus	-1,075	0,468	-1,369	0,239
Proportion d'hommes	-0,350	0,152	-0,387	0,350
Disponibilité d'automobiles	-0,421	0,183	-0,715	0,598
Revenu à l'origine	0,212	-0,092	0,143	0,031

En ce qui concerne les élasticités, on peut dire que dans le modèle I celles qui se rapportent aux variables dont les coefficients étaient significatifs (impédance autobus, temps de trajet automobile) sont de signes et de niveau attendus. Les transformations de Box-Cox ont fait varier de façon appréciable les élasticités se rapportant aux variables impédance autobus et disponibilité d'automobiles à l'origine mais rappelons que le coefficient de cette première variable devient non significatif alors que le coefficient de la disponibilité d'automobile le devient.

CHAPITRE III

Les modèles logit généralisé et logit universel

On a vu dans les chapitres précédents que pour la répartition modale certaines variables socio-économiques peuvent être incluses comme variables explicatives. Nous avons, dans les applications que nous avons faites, décidé de façon arbitraire que ces variables seraient attribuées à la fonction d'utilité associée au transport en commun. Cependant rien ne nous permet de faire une telle hypothèse et il est beaucoup plus logique de supposer que ces variables affectent tous les modes considérés et devaient donc en principe être incluses dans chacune des fonctions d'utilité.

McFadden, Tye et Train (1976) ne limitent pas ce raisonnement aux seules variables socio-économiques. Selon eux, on devrait inclure les caractéristiques de chacun des modes considérés ainsi que les variables socio-économiques dans chacune des fonctions d'utilité associées à ces modes de transport. Un tel modèle que l'on nommera logit universel a l'avantage de ne pas être compatible avec l'axiome de Luce (ITA) et on peut dire que les autres modèles de répartition modale ne sont que des cas particuliers de ce modèle "universel" et sont par le fait même plus contraignants que ce dernier.

Le fait de ne pas inclure les variables socio-économiques et les caractéristiques des autres modes de transport dans une fonction

d'utilité donnée revient en définitive à faire l'hypothèse que les coefficients qui affecteraient ces variables ne seraient pas différents de zéro. D'un autre côté leur inclusion pose des problèmes évidents en termes de procédures d'estimation. Tout d'abord il est sûr qu'on ne peut utiliser le modèle logit linéaire à cause de la collinéarité parfaite entre les variables qui se répètent. Une façon de contourner ce problème suggérée par Gaudry (1982) consiste à utiliser les transformations de Box-Cox :

> "The use of Box-Cox transformations which differs among themselves solves this problem because the transformed variables do not cancel out anymore. Consequently, Box-Cox transformations in principle provide a systematic way of including socioeconomic variables in the logit without arbitrarily deciding where identification requirements constrain this or that β_{1S} to be zero and simultaneoustly promise to provide an operational form of the UNIVERSAL LOGIT".
> (pp. 14-15).

Nous avons donc tenté d'estimer deux modèles où l'on répétait les variables explicatives en utilisant les données de la ville de Winnipeg. Dans le premier de ces modèles, (que l'on nommera par la suite logit généralisé) les variables socio-économiques étaient incluses dans les deux fonctions d'utilité. Le deuxième était un logit universel en ce sens que les caractéristiques du mode de transport alternatif et les variables socio-économiques étaient incluses dans les fonctions d'utilité associés au transport en commun et au transport par automobile. Les données étaient encore une fois traitées avec le modèle DSDML-1 (Liem, 1979). Les valeurs

initiales des λ qui affectaient des variables identiques étaient évidemment différentes et on laissait par la suite varier ces paramètres jusqu'à ce que la fonction de vraisemblance soit maximisée.

Avec le modèle logit universel nous avons considéré deux approches : la première consistait à imposer les mêmes contraintes sur les λ que dans le modèle II du chapitre précédent. La deuxième consistait à accorder un λ pour les variables de réseau et un pour les variables socio-économiques qui étaient associées au transport en commun tandis que toutes les variables associées à l'automobile (et qui étaient les mêmes) avaient leur propre λ. Aucune des deux approches n'a donné de résultats réellement satisfaisants. Dans le premier des cas, le processus de maximisation de la fonction de vraisemblance faisait que la valeur des λ affectant les mêmes variables était identique (ou presque) à la fin des itérations. Une autre solution engendrée était que un ou plusieurs des λ prenaient des valeurs très considérables ($\lambda > 20$) engendrant des problèmes numériques.

Dans la deuxième approche on n'a pas rencontré le premier problème cité plus haut grâce aux contraintes d'égalités imposées à certains λ mais on avait toujours un ou plusieurs λ prenant des valeurs très considérables. En fait ce résultat laisse fortement sous-entendre que la fonction de vraisemblance n'est pas bornée.

Comme il fallait s'y attendre le modèle logit généralisé a présenté les mêmes problèmes d'estimation que ceux que l'on a rencontré avec

le modèle logit universel. Bien qu'il soit beaucoup trop tôt pour se prononcer de façon définitive, ces deux types de modèles qui présentent des avantages théoriques évidents sur les autres modèles plus restrictifs (logit linéaire ou logit avec transformations de Box-Cox), semblent soumis à des problèmes d'estimation assez considérables. On pourrait toutefois contourner partiellement ces problèmes en fixant a priori la forme fonctionnelle du modèle mais on perd automatiquement toute la flexibilité que nous apporte la procédure Box-Cox.

En définitive, les quelques expériences menées au cours de ce rapport sont nettement insuffisantes pour rejeter ou adopter ces deux modèles et ils devront être testés à nouveau pour que l'on puisse se prononcer de façon définitive.

CONCLUSION

Ce rapport aura permis de montrer l'importance que revêt le choix de la bonne forme fonctionnelle lors de l'estimation de modèles de répartition modale. Comme on a pu le voir, les modèles où l'on estimait simultanément la forme fonctionnelle et les paramètres se sont avérés supérieurs au modèle logit linéaire lors de l'application aux données de la ville de Winnipeg. Nous n'avons toutefois pas retrouvé le même résultat lors des applications aux données de la ville de Montréal mais ceci semble attribuable à une division trop large du territoire.

Finalement, les tentatives d'estimation des modèles logit universel et logit généralisé se sont avérées infructueuses, mais elles font clairement ressortir des difficultés d'estimation de tels modèles. Il est toutefois trop tôt pour rejeter ces modèles.

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier en tout premier lieu monsieur Marc Gaudry qui m'a dirigé tout au long de ce travail. Ses remarques pertinentes et sa grande patience y sont pour beaucoup dans la réalisation de ce rapport de recherche.

Je veux également témoigner ma gratitude envers mes confrères et consoeurs de travail et plus particulièrement Richard Laferrière, André Roy, Gilles McDougall et Ernest Bastien.

Je ne peux passer sous silence l'excellent travail de Suzanne Larouche-Sidoti qui a eu le courage et la patience de dactylographier ce rapport.

Finalement je tiens à remercier Transport Canada et le Ministère du transport de Québec pour leur appui financier.

BIBLIOGRAPHIE

BOX, C.E.P., COX, D.R. (1964), "An Analysis of Transformations", dans Journal of Royal Statistical Society, Série B, no 26, pp. 211-243.

DI PIETRO, L. (1979), "Transformation de Box-Cox et demande de transport en commun à Montréal", Rapport de maîtrise en sciences économiques, Université de Montréal, 108 pages.

DOMENCICH, T.A. et McFADDEN, D. (1975), Urban Travel Demand, North-Holland.

GALARNEAU, S. (1978), "Calibration d'un modèle de répartition modale pour la ville de Winnipeg", Publication #99, Centre de recherche sur les transports, 53 pages.

GAUDRY, M.J.I. (1980), "Dogit and Logit Models of Travel Mode Choice in Montreal", dans Canadian Journal of Economics, pp. 266-279.

GAUDRY, M.J.I. (1982), "Functional Form and Stochastic Specification : Current Applications to Aggregate Time-Series and Cross Sectional Travel Demand Models", Cahier de recherche du C.R.D.E., #8233, 20 pages.

GAUDRY, M.J.I. et DAGENAIS, G. (1978), "The Dogit Model", Publication #82, Centre de recherche sur les transports, 14 pages.

GAUDRY, M.J.I., WILLS, M.J. (1978), "Estimating the Functional Form of Travel Demand Models", dans Transportation Research, Vol. 12, no 4, pp. 257-289.

LIEM, T.C. (1980), "DSDM:L-1, a Program for Box-Cox Transformations in Regression Models with Heteroskedastic and Autoregressive Residuals", Publication #134R, Centre de recherche sur les transports, 49 pages.

LUCE, R.D. (1959), Individual Choice Behavior, Wiley, New York.

McFADDEN, D., TYE, W., TRAIN, K.J. (1976), "Disgnostic Tests for the Independance from Irrelevant Alternatives Property of the Multinomial Logit Model", Publication #7616, Institute of Transportation Studies, Université de la Californie, Berkeley.

SCHLESSELMAN, J. (1971), "Power Families : A Note on the Box and Cox Transformation", dans Journal of Royal Statistical Society, Série B, Vol. 33.

STONE, J.N.R. (1954), "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis : An Application to the Pattern of British Demand", dans Economic Journal, Vol. 64, pp. 512-526.